OPCIÓN A

1. a) Discuta para qué valores de **m** el sistema siguientes tiene soluciones distintas de la trivial

$$\begin{cases} mx+2y+z=0 \\ 4x+2my+mz=0 \\ 2x+(2m-2+b)y+z=0 \end{cases}$$ **(7 puntos)**

b) Resuélvalo en el caso (o los casos) en que sea compatible indeterminado. **(3 puntos)**

Es un sistema de **ecuaciones homogéneo** siempre **Compatible** siendo **Determinado** cuando el determinante de las incógnitas es distinto de cero (entonces la solución es la trivial) e **Indeterminado** cuando dicho determinante es nulo

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 4 & 2m & m \\ 2 & 2m-2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 4-m^2 & 0 & 0 \\ 2-m & 2m-4 & 0 \end{vmatrix}=-\left(4-m^2\right)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2m-4 & 0 \end{vmatrix}=\left(4-m^2\right)\cdot(2m-4)=2\,(2+m)(2-m)(m-2)$$

$$|A|=(-2)\,(2+m)(m-2)(m-2)=(-2)\,(2+m)(m-2)^2 \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow (-2)\,(2+m)(m-2)^2=0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2+m=0 \Rightarrow m=-2 \\ m-2=0 \Rightarrow m=2 \end{cases}$$

$$\forall b \in \Re-\{-2\ ,\ 2\} \Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

$b)$

$$Si\ m=-2 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & -6 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A/B)=rang\ (A)=2<Número\ de\ incógnitas \Rightarrow$$

$$Sistema\ Compatible\ Indeterminado \Rightarrow 2y-z=0 \Rightarrow z=2y \Rightarrow -2x+2y+2y=0 \Rightarrow 2x=4y \Rightarrow x=2y$$

$$Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=(2\lambda\ ,\ \lambda\ ,\ 2\lambda)$$

$$Si\ m=2 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A/B)=rang\ (A)=1<Número\ de\ incógnitas \Rightarrow$$

$$Sistema\ Compatible\ Indeterminado \Rightarrow 2x+2y+z=0 \Rightarrow z=-2\alpha-2\beta \Rightarrow$$

$$Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=(\alpha\ ,\ \beta\ ,\ -2\alpha-2\beta)$$

2. Determinar el valor de **m** para los puntos A (1 , 2 , 0), B (0 , 3 , -1), C (1 , 0 , 1) y D (-1 , 2 , m) sean coplanarios **(6 puntos)** y calcular la ecuación general del plano que los contiene? **(4 puntos).**

a) El producto mixto de (que nos da el volumen del paralelepípedo que forman) los vectores **AB**, **AC** y **AD,** para ser coplanarios, (pertenecen al mismo plano) será nulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(0,3,-1)-(1,2,0)=(-1,1,-1)\equiv(1,-1,1) \\ \overrightarrow{AC}=(1,0,1)-(1,2,0)=(0,-2,1) \\ \overrightarrow{AD}=(-1,2,m)-(1,2,0)=(-2,0,m)\equiv(1,-1,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD}\right)=0\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & m-1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & m-1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow -2\cdot(m-1)=0\Rightarrow m-1=0\Rightarrow m=1$$

b) Los vectores **AB**, **AC** y **AG**, siendo **G** el punto genérico del plano buscado π , son coplanarios (pertenecen al mismo plano) siendo su producto mixto (que nos daría el volumen del paralelepípedo que forman) nulo y la ecuación pedida del plano.

$$-\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(1,-1,1) \\ \overrightarrow{AC}=(0,-2,1) \\ \overrightarrow{AG}=(x,y,z)-(1,2,0)=(x-1,y-2,z) \end{cases} \Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$-(x-1)-2z+2\,(x-1)-(y-2)=0\Rightarrow (x-1)-(y-2)-2z=0\Rightarrow \pi\equiv x-y-2z+1=0$$

3. Dada la función **f (x) = x³ – 3x² + 2x + 1** determinar el valor **c** que verifica que la pendiente de la recta tangente en **x = c** sea mínima **(6 puntos)** y calcular la correspondiente tangente de f (x) en **x = c**. **(4 puntos)**

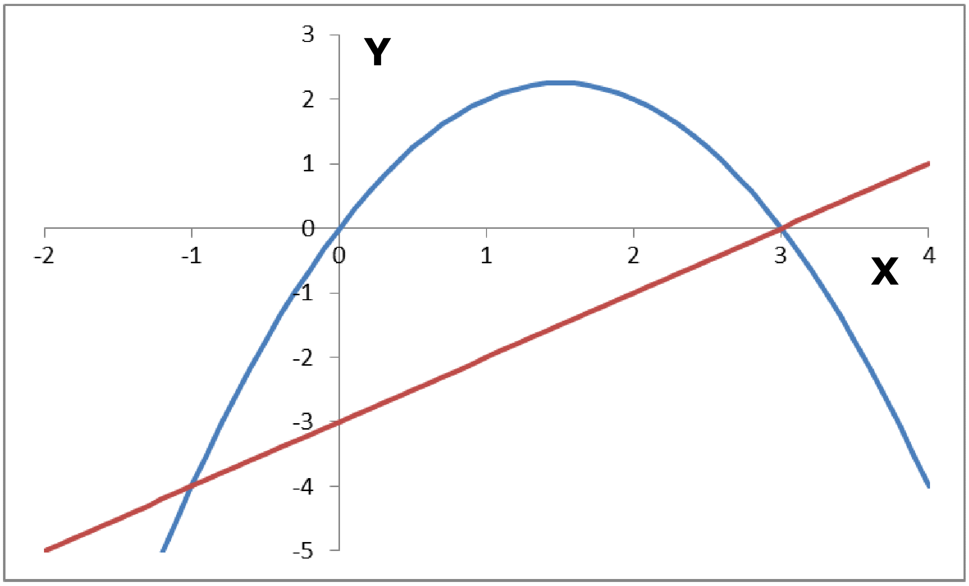
$a)$

$$f'(x)=3x^2-6x+2 \Rightarrow f''(x)=6x-6 \Rightarrow f''(x)=0 \Rightarrow 6x-6=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow f'''(x)=6>0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow$$

$$x=1 \Rightarrow \begin{cases} f(1)=1^3+3\cdot 1^2-2\cdot 1+1=1+3-2+1=3 \\ m=f'(1)=3\cdot 1^2-6\cdot 1+2=3-6+2=-1 \end{cases} \Rightarrow y-3=(-1)\cdot(x-1) \Rightarrow y=3-x+1 \Rightarrow y=-x+4 \Rightarrow$$

$$x+y+4=0$$

4. Haga un dibujo aproximado de las curvas y = 3x - x ² e y = x - 3 e indique los puntos donde se cortan **(4 puntos).**Calcular el área del recinto limitado por las dos curvas anteriores **(6 puntos).**



$$3x-x^2=x-3 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow \Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=16>0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$A=\left|\int_{-1}^{0}(x-3)\,dx\right|-\left|\int_{-1}^{0}(3x-x^2)\,dx\right|+\int_{0}^{3}(3x-x^2)\,dx+\left|\int_{0}^{3}(x-3)\,dx\right|=$$

$$A=-\int_{-1}^{0}(x-3)\,dx+\int_{-1}^{0}(3x-x^2)\,dx+\int_{0}^{3}(3x-x^2)\,dx-\int_{0}^{3}(x-3)\,dx=-\int_{-1}^{3}(x-3)\,dx+\int_{-1}^{3}(3x-x^2)\,dx$$

$$A=\int_{-1}^{3}(2x-x^2+3)\,dx=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-1}^{3}-\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-1}^{3}+3\cdot[x]_{-1}^{3}=\left[3^2-(-1)^2\right]-\frac{1}{3}\cdot\left[3^3-(-1)^3\right]+3\cdot[3-(-1)]$$

$$A=(9-1)-\frac{1}{3}\cdot[27-(-1)]+3\cdot(3+1)=8-\frac{28}{3}+12=20-\frac{28}{3}=\frac{60-28}{3}=\frac{32}{3}\,u^2$$

OPCIÓN B

1.- Calcula la Matriz X tal que **BX - B² = A.B**, siendo : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(10 puntos)**

$$B \cdot (X - B) = A \cdot B \Rightarrow B^{-1} B \cdot (X - B) = A \cdot B^{-1} B \Rightarrow X - B = A \Rightarrow X = B + A$$

$$X = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Calcular el punto simétrico del punto **A (-3 , 1 , -7)** respecto de la recta $x + 1 = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$

(10 puntos)

Hallaremos un plano π que conteniendo al punto **A** sea perpendicular a la recta **r** dada, su vector director es el mismo que la recta que, además es perpendicular al vector **AG**, siendo **G** el punto genérico del plano, siendo su producto escalar nulo y la ecuación buscada del plano.
Hallaremos el punto de intersección **P** de la recta y el plano hallado que es el punto medio entre **A** y su simétrico **A'**

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{AB} = (6, 5, 6) - (1, 2, 5) = (5, 3, 1) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_r} = (1, 2, 2) \\ \overrightarrow{AG} = (x, y, z) - (-3, 1, -7) = (x+3, y-1, z+7) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \Rightarrow (1, 2, 2) \cdot (x+3, y-1, z+7) = 0 \Rightarrow x + 3 + 2y - 2 + 2z + 14 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x + 2y + 2z + 15 = 0 \Rightarrow$$

$$r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow (-1 + \lambda) + 2(3 + 2\lambda) + 2(-1 + 2\lambda) + 15 = 0 \Rightarrow -1 + \lambda + 6 + 4\lambda - 2 + 4\lambda + 15 = 0 \Rightarrow$$

$$18 + 9\lambda = 0 \Rightarrow 9\lambda = -18 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow P \begin{cases} x = -1 + (-2) \\ y = 3 + 2 \cdot (-2) \\ z = -1 + 2 \cdot (-2) \end{cases} \Rightarrow P(-3, -1, -5) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -3 = \dfrac{-3 + x_{A'}}{2} \Rightarrow -3 + x_{A'} = -6 \Rightarrow x_{A'} = -3 \\ -1 = \dfrac{1 + y_{A'}}{2} \Rightarrow 1 + y_{A'} = -2 \Rightarrow y_{A'} = -3 \\ -5 = \dfrac{-7 + z_{A'}}{2} \Rightarrow -7 + z_{A'} = -10 \Rightarrow x_{A'} = -3 \end{cases} \Rightarrow A'(-3, -3, -3)$$

3. Demuestra que existe un único valor x > 0 solución de la ecuación $x^2 - e^{-x} = 0$ (6 puntos por la existencia y 4 puntos por la unicidad).

$$Siendo\ f(x) = x^2 - e^{-x} \Rightarrow Dom(f) = \forall x \in \Re$$

$$Aplicando\ el\ teorema\ de\ Bolzano\ en\ el\ intervalo\ [0,1]\ tenemos\ que$$

$$\begin{cases} f(0) = 0^2 - e^{-0} = 0 - e^0 = 0 - 1 = -1 < 0 \\ f(1) = 1^2 - e^{-1} = 1 - \dfrac{1}{e} = \dfrac{e-1}{e} > 0 \end{cases} \ cambia\ de\ signo\ luego\ hay\ un\ punto\ c \in (0,1)\ tal\ que\ f(c) = 0$$

$$Siendo\ f'(x) = 2x + e^{-x} \Rightarrow Creciente\ siempre\ que\ x > 0\ ya\ que \Rightarrow \begin{cases} 2x > 0 \Rightarrow x > 0 \\ e^{-x} > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \end{cases},\ existe\ solo\ un$$

$$punto\ c \in (0,\infty)\ en\ donde\ la\ función\ se\ anula,\ por\ ello \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - e^{-x} = 0$$

Problema resuelto por D. German Jesús Rubio Luna

4.- Calcule la siguiente integral indefinida: $\int \frac{x-2}{x^2+x}\,dx$ **(10 puntos)**

$$\frac{x-2}{x^2+x} = \frac{x-2}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} \Rightarrow A(x+1) + Bx = x - 2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} Si\ x = 0 \Rightarrow A(0+1) + B \cdot 0 = 0 - 2 \Rightarrow A = -2 \\ Si\ x = -1 \Rightarrow A(-1+1) + B \cdot (-1) = -1 - 2 \Rightarrow -B = -3 \Rightarrow B = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{x^2+x} = \frac{-2}{x} + \frac{3}{x+1}$$

$$\int \frac{x-2}{x^2+x}\,dx = -2\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{dx}{x+1} = -2\ln x + 3\int \frac{dt}{t} = -\ln x^2 + 3\ln t = -\ln x^2 + \ln (x+1)^3 = \ln \frac{(x+1)^3}{x^2} + K$$

$$x + 1 = t \Rightarrow dx = dt$$